RÉSUMÉ DE MÉCANIQUE.

PARTIE 1: La mécanique cinématique.
1. Introduction.
1.1 Définition: La cinématique est l'étude des mouvements des corps solides en fonction du temps indépendamment des causes de ces mouvements.
L'étude des mouvements ne peut se faire qu'en précisant par rapport à quoi a lieu ce mouvement. Le temps permet de repérer les positions différentes. On associe au système de référence un repère. Ce repère est caractérisé par un trièdre orthonormé direct.

Un solide est dit en mouvement par rapport à un repère R0 si au moins un de ses points est en mouvement par rapport à R0. Un point matériel est dit en mouvement par rapport à un repère R0 si au moins une de ses coordonnées dans R0 varie dans le temps.

1.2 Distances et déplacements.
En physique, nous dirons que la distance est une grandeur scalaire et que le déplacement est une grandeur vectorielle.
La grandeur scalaire présente une amplitude pendant que la grandeur vectorielle présente une amplitude, une direction et un sens.

2. Mouvement rectiligne.
2.1 Mouvement rectiligne: vitesse.
Nous appellerons mouvement rectiligne, le mouvement d'un mobile le long d'une ligne droite.
Nous définirons la vitesse moyenne comme le vecteur:
$\overrightarrow{\bar{v}} = \Delta \overrightarrow{x} / \Delta t$ (1)
Si nous faisons tendre maintenant la grandeur Δt vers 0, nous pouvons définir la vitesse instantanée comme:
$\overrightarrow{Vinst} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \overrightarrow{x} / \Delta t$ (2)
Une autre façon d'évaluer la vitesse instantanée d'un mobile est de tracer la courbe de la position: trajectoire du mobile, en fonction du temps, et d'évaluer la pente (ou tangente) sous la courbe en un point donné. De façon mathématique, l'on peut aussi écrire:
$\overrightarrow{Vinst} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \overrightarrow{x} / \Delta t = dx/dt \ \overrightarrow{i}$ (3)
Dans la formule précédente dx/dt n'est autre que la dérivée de x par rapport au temps (identique à la pente de la trajectoire en un point donné), d'où:
$\left|\overrightarrow{Vinst}\right|(x = x0) = dx / dt(x = x0)$ (4)

2.2 Mouvement rectiligne: accélération.

L'accélération moyenne d'un mobile en mouvement sur une droite est définie de la façon suivante:

$\overrightarrow{\bar{a}} = \Delta \overrightarrow{v} / \Delta t = (\overrightarrow{V2} - \overrightarrow{V1}) / t2 - t1$ (5)

Lorsque $\overrightarrow{V2} \geq \overrightarrow{V1}$, il y a accélération.

Lorsque $\overrightarrow{V2} \leq \overrightarrow{V1}$, il y a décélération.

De la même façon que pour les vitesses nous pouvons définir l'accélération instantanée comme:

$\overrightarrow{a,inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \overrightarrow{v} / \Delta t = dv/dt \ \overrightarrow{i}$ (6)

Soit $\overrightarrow{a,inst} = d^2x/dt$ (7)

2.3 Unités.

$\left\| \overrightarrow{V} \right\| = [m]/[s]$ (8)

$\left\| \overrightarrow{a} \right\| = [m]/[s^2]$ (9)

3. Généralisation.

3.1 Repère d'espace, vecteur vitesse et accélération.

Dans le repère $(O; \overrightarrow{i})$, le vecteur espace $\overrightarrow{OM}$ s'écrit $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{i}$ (11)

Et le vecteur vitesse relativement au repère $(O; \overrightarrow{i})$ est:

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM}/dt = Vx \ \overrightarrow{i}$ (12)

Le vecteur accélération relativement au repère $(O; \overrightarrow{i})$ est:

$\overrightarrow{a} = d\overrightarrow{V}/dt = d^2x/dt^2 \ \overrightarrow{i} = d^2 \overrightarrow{OM}/dt^2 \ \overrightarrow{i} = ax \ \overrightarrow{i}$ (13)

Avec ax= dVx/dt (14)

4. Mouvement rectiligne uniforme (MRU).

4.1 Définition: Uniforme: intensité du vecteur vitesse est constant. Un mobile est animé d'un MRU si sa trajectoire est une droite et si sa vitesse instantanée est constante.

Si l'origine des espaces correspond à l'origine des temps:

L'intensité de la vitesse $\overrightarrow{V}$ est constante d'où la vitesse moyenne est égale à la vitesse instantanée $\overrightarrow{V}(t)$. D'où:

$\overrightarrow{V}(t) = d\overrightarrow{x}/dt$ (15)

Puisque:

$\overrightarrow{V0} = d\overrightarrow{x}/dt$ et V0= dx/dt= cst (16)

L'équation horaire x= x(t) s'écrit:

x= V0t (17)

Ecrivons maintenant l'expression de l'accélération:

$\overrightarrow{a}(t) = d\overrightarrow{V}/dt$ (18)

Et puisque:

a0= dV0/dt= 0 (19)

Alors:

$\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{0}$

L'accélération d'un mobile qui subit un MRU est nulle.

Si l'origine des espaces ne correspond pas à l'origine des temps:
A l'instant t, la coordonnée du point en mouvement sera:
x(t)= x(0) + $\left|\overrightarrow{V}\right|$(t) (20)
Dans le cas du MR, nous avons:
$\left|\overrightarrow{V}\right|$= V
Et l'équation précédente s'écrira:
x(t)= vt + x0

5. Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV).
5.1 Définition: Uniformément varié: La vitesse augmente de façon régulière.
Ainsi, la variation $\Delta\overrightarrow{V}$ de la vitesse par seconde est constante.
Ainsi:
$\left|\Delta\overrightarrow{V}(t)\right|/\Delta$t= cst (21)
Or nous avons défini l'accélération comme étant cette quantité. Ainsi, un MRUV se caractérise par son intensité d'accélération $\left|\overrightarrow{a}\right|$ constante. Soit:
$\overrightarrow{a}$ = $\overrightarrow{\bar{a}}$ = $(\overrightarrow{V2}-\overrightarrow{V1})/t2-t1$ (22)
Dans le cas du MR, nous pouvons travailler de façon scalaire, c'est à dire avec les modules des vecteurs:
$\left|\overrightarrow{a}\right|$= a= $\bar{a}$= (V2- V1)/t2- t1 (23)
le mouvement se fait selon une seule direction, il est alors commode de choisir comme repère d'espace, un repère à une seule dimension (O; $\overrightarrow{i}$) ayant même direction que le mouvement:
a= dVx/dt
$\int$ dVx= $\int$ adt
Vx= a$\int$ dt= at + cste= at + k1

5.2. Généralisation.
Si à l'instant de date t= 0s, la vitesse du mobile est $\overrightarrow{V}$(0)= V0 $\overrightarrow{i}$, soit:
$\left|\overrightarrow{V}\right|$= (at + V0) $\overrightarrow{i}$
Comme:
$\overrightarrow{V}$= d$\overrightarrow{OM}$/dt= dx/dt $\overrightarrow{i}$ (24)
Alors:
dx/dt= at + V0 (25)
$\int$ dx= $\int$ adt - $\int$ V0dt (26)
x(t)= a$\int$ dt - V0$\int$ dt (27)
Intégrons maintenant la dernière équation:
x(t)= 1/2 a(t^2) + V0(t+ k2) (28)

Soit:

$\overrightarrow{OM}$=1/2 a(t^2) + V0(t+ k2) $\overrightarrow{i}$ (29)

Pour déterminer la constante k2, considérons qu'à présent t= 0, le mobile est en x(0)= X0, d'où d'après l'équation (29):

k2= X0

Ainsi, $\overrightarrow{OM}$= x(t) $\overrightarrow{i}$

Soit x(t)= 1/2 at^2 + V0t + X0

C'est l'équation horaire du MRUV.

Dans le MRUV, l'accélération est constante, la vitesse est une fonction affine du temps et l'abscisse est une fonction du second degré en t.

Les expressions de x(t) et v(t) dans le cas du MRUV sont:

v (t)= at + V0

x (t)= 1/2 at^2 + V0t + X0

On se propose de chercher une relation liant l'abscisse x(t) du mobile et sa vitesse v(t) indépendante du temps.

Dans la première équation, l'expression de t est:

t= (v(t) - V0)/a

Ainsi:

x(t)= 1/2 a $((v(t) - V0)/a)^2$ + V0((x(t) - V0)/a) + X0

Ou encore:

$v(t)^2$ - $V^2$0= 2a(x(t) - X0)

Si on désigne par xA et xB les abscisses de deux points A et B quelconques du mobile et vA et vB ses vitesses de passage par ces deux points, nous aurons d'après l'équation précédente:

v^2A - $v^2$0= 2a(xA - x0)

v^2B - $v^2$0= 2a(xB - x0)

En additionnant:

v^2A - v^2B= 2a(xA - xB)

1e cas: Les vecteurs vitesse et accélération sont dans le même sens:

$\overrightarrow{V} . \overrightarrow{a} \geq 0$

Dans ce cas, le module du vecteur vitesse augmente au cours du temps, le mouvement est alors dit rectiligne uniformément accéléré.

2e cas: Les vecteurs vitesse et accélération sont de sens contraire:

$\overrightarrow{V} . \overrightarrow{a} \leq 0$

Dans ce cas, le module du vecteur vitesse décroît au cours du temps. Le mouvement est alors dit rectiligne uniformément retardé.

7. Mouvement circulaire (MC).

7.1 Généralités.

On dit qu'un mobile M est animé relativement à un repère (O; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$) d'un MC si sa trajectoire dans ce repère est un cercle ou un arc de cercle.

La trajectoire du mobile M est entièrement déterminée lorsque l'on connaît dans ce repère le plan du cercle, les coordonnées de son centre C et de son rayon R. Pour repérer un mobile en MC, deux méthodes commodes sont souvent utilisés: repérage par l'abscisse curviligne ou angulaire.
Dans le premier cas, l'on repère la position de M du mouvement à l'instant t par son abscisse curviligne s. On oriente la trajectoire et on choisit sur cette trajectoire une origine fixe A. L'abscisse curviligne s du mobile M à l'instant t est égal à la valeur algébrique de l'arc AM soit:
s= $\left|\overrightarrow{AM}\right|$ ou s= x(t)
Dans le deuxième cas, à chaque abscisse curviligne s du mobile correspond une abscisse angulaire α qui est la mesure algébrique de l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{CM}$ avec le vecteur $\overrightarrow{CA}$ soit:
α= ($\overrightarrow{CA}$. $\overrightarrow{CM}$)= s/R
La valeur algébrique de l'abscisse angulaire est liée à l'abscisse curviligne par la relation:
α= s/R
L'angle α est exprimé en radians. Ainsi, l'équation α= x(t) est aussi une équation horaire du mouvement.
Pour les mouvements rapides, il est souvent commode d'utiliser le nombre de tours n effectués par le mobile à l'instant de date t. Sachant que 1 tr/ s= 2π rad/ s.
n est lié à la vitesse angulaire α par la relation:
n= α/2π
La position M du mobile à une date t peut être repérée par les coordonnées du point M dans le repère (C; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$) soit:
M: x= R cos α et y= R sin α

8. Vecteur vitesse: vitesse angulaire.
8.1 Caractéristiques du vecteur vitesse.
Les caractéristiques du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ d'un mobile M animé relativement à (C; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$) d'un MC sont les suivantes:
La direction du vecteur vitesse du mobile M est celle de la tangente à la trajectoire du point M.
Le sens du vecteur vitesse est celui du mouvement.
La norme du vecteur vitesse est donnée par: $\left|\overrightarrow{V}\right|$= $\left|ds/dt\right|$.
La valeur algébrique du vecteur vitesse: $\overrightarrow{V}$= ds/dt.
Or, s= R α, d'où $\overrightarrow{V}$= d R α/dt= R d α/dt.
On fait apparaître ainsi une nouvelle grandeur:
$\dot{\alpha}$= dα/dt, appelée vitesse angulaire du mobile.
La vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ d'un mobile M en MC est la dérivée par rapport au temps de son abscisse α.
La vitesse $\overrightarrow{V}$ est liée à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ par la relation:

$\overrightarrow{v} = R\,\dot{\alpha}$
L'unité de la vitesse angulaire est le radian par seconde (rad/s).

9. Vecteur accélération.
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} = a_N.\overrightarrow{T} + a_T.\overrightarrow{N}$
Nous pouvons démontrer que:
a_T= dv/dt= d^2s/dt^2
a_N= v^2/R
Où R= $|\overrightarrow{OM}|$ est le rayon de la trajectoire circulaire.
On a dans le cas d'un mouvement circulaire:
$\overrightarrow{v} = R\,\dot{\alpha}$
L'accélération tangentielle s'écrit:
a_T= dv/dt= d(R $\dot{\alpha}$)/dt= R d$\dot{\alpha}$/dt= R $d^2\alpha/dt^2$
On fait apparaître ainsi une nouvelle grandeur:
$\ddot{\alpha}$= d$\dot{\alpha}$/dt= $d^2\alpha/dt^2$, appelée accélération angulaire du mobile.
L'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ d'un mobile M en MC est la dérivée seconde par rapport au temps de son abscisse angulaire α.
Dans le SI, l'unité d'accélération est le radian par seconde carré (rad/ s^2).
Rq: La composante tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ du vecteur accélération linéaire $\overrightarrow{a}$ est lié à l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ par la relation:
a_T= R $\ddot{\alpha}$
La composante normale $\overrightarrow{a_N}$ du vecteur accélération linéaire $\overrightarrow{a}$ est lié à l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ par la relation:
a_N= R $\ddot{\alpha}$

10. MC uniforme (MCU).
10.1 Définition: Soit un mobile M relativement à un repère (O; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$). Ce mouvement est dit uniforme si le module du vecteur vitesse du mobile reste constant au cours du mouvement.
$|\overrightarrow{v}|$= cst
D'où:
$\dot{\alpha}$= v/R donc $\dot{\alpha}$= cste d'où: $\ddot{\alpha}$= d$\dot{\alpha}$/dt= 0
La vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ étant cste:
$\dot{\alpha}$= dα/dt
Soit:
$\dot{\alpha}$dt= dα
L'équation horaire du mouvement sera alors de la forme:
x(t)= $\dot{\alpha}$t + α0
Où α0 est l'abscisse angulaire du mobile M à l'origine des temps.
Cherchons les composantes $\overrightarrow{a_T}$ et $\overrightarrow{a_N}$ du vecteur accélération $\overrightarrow{a}$. Le module du vecteur vitesse étant constant au cours du temps:

$\vec{a}$: $\vec{a_T}$= dv/dt= 0 et $\vec{a_N}$ = v^2/R= cst
Le vecteur accélération $\vec{a}$ est confondu avec le vecteur $\vec{a_N}$, soit:
$\vec{a}$= $\vec{a_N}$ = R. $\dot{\alpha}^2$ $\vec{N}$= -$\dot{\alpha}^2$ $\vec{OM}$
Lorsque le mobile M est animé d'un MCU, le vecteur accélération de norme R. $\dot{\alpha}^2$ est constamment dirigé vers le centre O de la trajectoire. On dit que le vecteur accélération est centripète.
La période T du MCU est le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet, T est alors donné par:
T= $2\pi/\dot{\alpha}$
La fréquence du MCU est le nombre de tours effectués par seconde:
f= 1/T= $\dot{\alpha}/2\pi$

PARTIE 2: La mécanique dynamique.
1. La relation fondamentale de la dynamique: Quantité de mouvement et force.
1.1 Définition: Pour un point matériel de masse m animé par rapport à un repère (O; $\vec{j}$; $\vec{k}$) d'un mouvement de vitesse $\vec{V}$, le vecteur quantité de mouvement de ce point matériel est:
$\vec{P}$ = m $\vec{V}$ (30)
Caractéristiques du vecteur quantité de mouvement:
Sens et direction semblable à $\vec{V}$.
Module: $|\vec{P}|$= $|m\vec{V}|$.
Unité: Kg m/ s.

Une force est toute cause capable de modifier le vecteur quantité de mouvement du corps sur lequel elle s'exerce.
Nous verrons qu'une relation de cause à effet existe entre la somme des forces qui s'exerce sur un point matériel et la modification correspondante du vecteur quantité de mouvement de ce point; c'est la 1e loi de la dynamique.
Définition: La chute libre est le mouvement d'un corps soumis à la seule action de son poids.
Rq: Dans l'air, la chute d'un mobile pourrait être considérée libre si l'action de l'air sur ce mobile est négligeable devant celle de son poids.
Nous pouvons démontrer que la chute libre sans vitesse initiale d'une bille est un MRUV d'accélération $\vec{a}$ avec: $|\vec{a}|$= 9, 8 m/s^2.

Le poids d'un mobile ponctuel en chute libre est à chaque instant égal à la dérivée de son vecteur quantité de mouvement.
La relation traduisant le principe fondamental de la dynamique classique ou Newtonienne: d$\vec{P}$ /dt= $\sum_i \vec{F_i}$ démontrée dans le cas de la chute libre d'une bille est une relation générale valable pour tout point matériel et de n'importe quel mouvement.

Nous limiterons notre étude aux mobiles dont la masse reste constante au cours du temps, nous aurons alors:

$d\overrightarrow{P}/dt = dm\overrightarrow{V}/dt = m\, d\overrightarrow{V}/dt = m\overrightarrow{a}$

Dans ce cas, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit:

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = m\overrightarrow{a}$$

2. Cas d'un point matériel isolé: principe de l'inertie.

2.1 Définition: Un point matériel est dit isolé s'il n'est soumis à aucune force extérieure.

Un point matériel soumis à plusieurs forces est dit pseudo- isolé si la somme de ses forces est nulle.

Dans le 2e cas:

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$$

Dans un repère Galiléen, un point matériel isolé ou pseudo- isolé A de masse m:

$$\overrightarrow{P} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

La somme des forces exercées sur A:

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0}$$

Appliquons la loi fondamentale:

$$\sum_i \overrightarrow{F_i} = d\overrightarrow{P}/dt = \overrightarrow{0}$$

Où $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{V}$ d'où: $\sum_i \overrightarrow{F_i} = dm\overrightarrow{V}/dt = m\, d\overrightarrow{V}/dt = \overrightarrow{0}$

Donc, $d\overrightarrow{V}/dt = \overrightarrow{0}$ donc: $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{Cst}$

Le vecteur $\overrightarrow{V}$ est donc constant en direction, sens et module.

Deux cas se présentent:

1. Cas où la norme du vecteur est nulle dans le repère Galiléen choisit. Ce point matériel est alors au repos relativement à ce repère.

2. La norme initiale du vecteur vitesse est constante, le mobile est animé d'un MRU.

Dans un repère Galiléen, si un point matériel, isolé ou pseudo- isolé est au repos, il reste au repos et s'il est en mouvement, ce mouvement est alors RU.

Considérons un projectile lancé horizontalement. Son mouvement contient deux composantes:

Un mouvement horizontal sans force horizontale et donc vitesse constante.

Un mouvement vertical sous l'influence de la gravité et donc à l'accélération constante.

Comme la force est un vecteur, elle n'accélère les corps que dans sa propre direction.

Dans cet exemple, les composantes horizontale et verticale de la vitesse initiale sont:
$V0x= V0 \cos\theta$
$V0y= V0 \sin\theta$
Si l'origine de déplacement au goulot de la bouteille, les composantes horizontale et verticale du déplacement sont par conséquent:
x0= V0t
$y0= V0t + (1/2)gt^2$

Considérons le projectile lancé verticalement dans un train qui roule à vitesse constante:
Une fois lancé, l'objet garde sa vitesse horizontale uniforme, celle du train. Il tombe verticalement.
Vu d'un observateur hors du train, l'objet suit un parcours parabolique tout comme le projectile du canon
La loi d'inertie est valable dans les référentiels à vitesse relative constante, dis référentiel d'inertie.
Nous avons vu les effets de la force mais quelle est sa nature?
La force est l'agent du changement, l'agent qui change la vitesse des corps ou essaie de le faire.
Les forces macroscopiques peuvent être mesurées à l'aide d'un dynamomètre.
Comme la force est un vecteur, l'effet net de plusieurs forces est la même que celui d'une seule force qui correspond à la somme vectorielle des forces.
Quand la somme de toutes les forces est nulle, il n'y a aucun mouvement. On parle alors d'équilibre statique. Mais les forces existent tout de même à l'intérieur du système.
Quand la somme vectorielle des forces est différente de zéro, la situation est dynamique.
Il y a accélération dans la direction de la force.
Mais méfiez vous, s'il y a des contraintes au mouvement, par exemple via des rails ou la quille d'un bateau, seule une partie de la force peut agir.

Pour déterminer une force, nous connaissons deux méthodes, celle du triangle et celle des composantes.
1/ Méthode du triangle:
Le problème est simplifié parce que $\overrightarrow{F1}$ est à perpendiculaire à $\overrightarrow{F2}$. Le théorème de Pythagore nous dit que pour le triangle des forces:
$F^2 = |\overrightarrow{F}|^2 = F1^2 + F2^2 = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500N.$
L'angle par rapport à la force $\overrightarrow{F2}$ est θ:
$\theta = \tan^{-1} F1/ F2 = 36,9°.$
La tension est de 500N.
2/ Par la méthode des composantes, nous prenons l'axe x le long de $\overrightarrow{F2}$, l'axe y le long de $\overrightarrow{F1}$:

Fx= F2
Fy= F1
Le module est F= $\sqrt{Fx^2 + Fy^2}$
L'angle θ est θ= $\tan^{-1}$ Fx/ Fy

Le calcul de la force nette se fait par l'addition des vecteurs forces:
$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F1} + \overrightarrow{F2} + \overrightarrow{F3}$
La méthode des composantes s'impose:
Nous commençons par la détermination des composantes de $\overrightarrow{Fi}$:
Fix= Fi cosθi
Fiy= Fi sinθi
Avec l'angle θi entre la force $\overrightarrow{Fi}$ et l'axe x$\overrightarrow{Fi}$.
Les composantes de la force, résultante sont égales aux sommes des composantes:
Fix= F1x + F2x + F3x
Fiy= F1y + F2y + F3y
Nous commençons par la détermination des composantes de $\overrightarrow{Fi}$:
L'on calcule F1x, F1y, F2x, F2x, F3x et F3y.
La somme des composantes donne:
Les composantes de la force résistante $\overrightarrow{Fi}$:
Fix= F1x + F2x + F3x= 0
Fiy= F1y + F2y + F3y= 0
Les trois forces sont en équilibre.

Si la masse d'un objet est constante, la dérivée par rapport au temps dans la 2e loi de Newton ne concerne que la vitesse:
$\overrightarrow{F}$= d$\overrightarrow{V}$/dt= m$\overrightarrow{a}$
On voit que la force accélère les objets dans sa propre direction. Bien se rappeler que $\overrightarrow{F}$ est la résultante des $\overrightarrow{F}$, ou force nette sur le corps. Une $\overrightarrow{F}$ de 1N appliquée à un objet de masse 1Kg provoque une accélération constante de 1m/ s^2.